一、研究目的

為求出圓外一點或是一直線至圓距離為整數的圓上點個數,計算出個數到底有幾個,並且考慮此問題的結果到底與圓的半徑是否為整數有無關係,若當半徑為非整數時,其結果將會是如何。

二●正文

一、研究過程解決問題的思路：

(一)　先將基本的條件(半徑、圓心、直線方程式……)假設。

(二)　本問題考慮的形式共有四種情況:

1. 半徑為整數時，圓外一點至圓距離為整數的圓上點個數為何?

2. 半徑為整數時，圓外一條直線至圓距離為整數的圓上點個數為何?

3. 半徑不為整數時，圓外一點至圓距離為整數的圓上點個數是否與半徑為整數時的結論相同?

4. 半徑不為整數時，圓外一條直線至圓距離為整數的圓上點個數是否與半徑為整數時的結論相同?

(三)　高斯符號介紹:

對任意實數x，則必存在唯一一個整數n，使得$n \le x < n+1$，在此情況下我們定義實數x的高斯符號$[x]$為n，換句話說即$[x]=n$，由定義我們知道$[x] \le x < [x]+1$，且簡單的從定義可推出，當n為整數時，$[x+n]=[x]+n$。

性質: 當n為整數時，則$[x+n]=[x]+n$。

pf: $\because [x] \le x < [x]+1$，$\therefore [x]+n \le x+n < [x]+n+1$，但因為$[x+n]$為不大於$x+n$之最大整數，所以由上述不等式知道$[x+n]=[x]+n$。

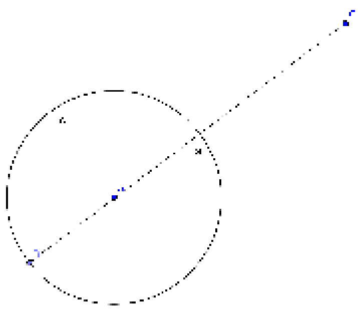
二、主要問題與討論：

（一）當半徑 r 為整數時，圓外一點至圓距離為整數的圓上點個數為 $4r$。

pf：設圓心 $O(a,b)$，半徑 $r\in\mathbb{N}$，其圓 C 方程式為 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，任意給定圓外一點 $P(x_0,y_0)$，令圓上任意點 $Q(x,y)$ 到點 $P(x_0,y_0)$ 之距離為 $\overline{PQ}$，則 $\overline{OP}-r\le\overline{PQ}\le\overline{OP}+r$，且由前面高斯符號性質知道 $\because r\in N$，

$\therefore\left[\overline{OP}+r\right]=\left[\overline{OP}\right]+r$，$\left[\overline{OP}-r\right]=\left[\overline{OP}\right]-r$，所以 $\overline{PQ}$ 落在此範圍內為整數的共有 $\left[\overline{OP}+r\right]-(\left[\overline{OP}-r\right]+1)+1=\left[\overline{OP}\right]+r-(\left[\overline{OP}\right]-r+1)+1=2r$。

因為每一個整數距離與圓相交兩點，故圓外一點 $P(x_0,y_0)$ 至圓 C 距離為整數的圓上點個數為 $2\times2r=4r$。



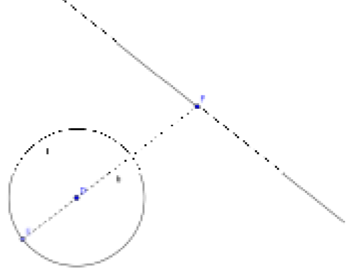
圖一

（二）當半徑 r 為整數時，圓外一直線 L 至圓距離為整數的圓上點個數為 $4r$。

pf：設圓心 $O(x_0,y_0)$，半徑 $r\in\mathbb{N}$，其圓 C 方程式為 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，任意給定圓外一條直線 L: $ax+by+c=0$，令圓上任意點 $Q(x,y)$ 到直線 L 之距離為 $d(Q,L)$，則 $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}-r\le d(Q,L)\le\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}+r$，所以 $d(Q,L)$ 落在此範圍內為整數的共有

$$\left[\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}+r\right]-(\left[\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}-r\right]+1)+1=\left[\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]+r-(\left[\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]-r+1)+1=2r$$

因為每一個整數距離與圓相交兩點，故圓外一直線 L 至圓 C 距離為整數的圓上點個數為 $2\times2r=4r$。



圖二

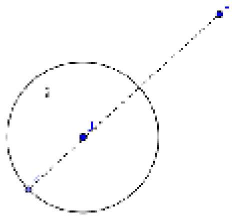
（三）當半徑r為任意正數且$\overline{OP}\in\mathbb{N}$時，圓外一點$P$至圓距離為整數的圓上點個數為$2([r]-[-r])$。

pf：設圓心$O(a,b)$，半徑$r\in\mathbb{N}$，其圓C方程式為$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，任意給定圓外一點$P(x_0,y_0)$，令圓上任意點$Q(x,y)$到點$P(x_0,y_0)$之距離為$\overline{PQ}$，則$\overline{OP}-r\le\overline{PQ}\le\overline{OP}+r$，且由前面高斯符號性質知道$\because\overline{OP}\in\mathbb{N}$，

$\therefore\left[\overline{OP}+r\right]=\overline{OP}+[r]$，$\left[\overline{OP}-r\right]=\overline{OP}+[-r]$，所以$\overline{PQ}$落在此範圍內為整數的共有

$$\left[\overline{OP}+r\right]-(\left[\overline{OP}-r\right]+1)+1=\overline{OP}+[r]-(\overline{OP}+[-r]+1)+1=[r]-[-r]。$$

因為每一個整數距離與圓相交兩點，故圓外一點$P(x_0,y_0)$至圓C距離為整數的圓上點個數為$2([r]-[-r])$。



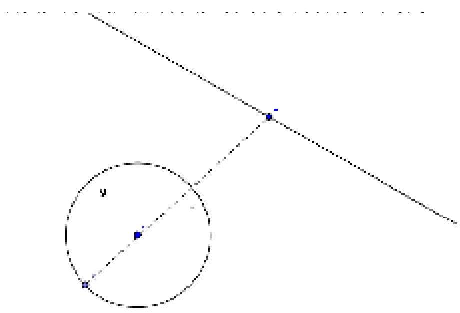
圖三

（四）當半徑r為任意正數且$d(O,L)\in\mathbb{N}$時，圓外一直線L至圓距離為整數的圓上點個數為$2([r]-[-r])$。

pf：設圓心$O(x_0,y_0)$，半徑$r\in\mathbb{N}$，其圓C方程式為$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，任意給定圓外一條直線L: $ax+by+c=0$，令圓上任意點$Q(x,y)$到直線L之距離為$d(Q,L)$，則$\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}-r\le d(Q,L)\le\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}+r$，所以$d(Q,L)$落在此範圍內為整數的共有

$$\left[\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}+r\right]-(\left[\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}-r\right]+1)+1=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}+[r]-(\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}+[-r]+1)+1=[r]-[-r]$$

因為每一個整數距離與圓相交兩點，故圓外一直線L至圓C距離為整數的圓上點個數為$2([r]-[-r])$。



圖四

由上述討論，我們可以推知，當一個圓的半徑為正整數或是$\overline{OP} \in \mathbb{N}$或是$d(O,L) \in \mathbb{N}$時，平面上任意點或任意直線至圓距離為整數的圓上點個數只與圓半徑有關。 但我們不禁決定探討一下當圓半徑非整數時且$\overline{OP} \notin \mathbb{N}$或是圓半徑非整數時且$d(O,L) \notin \mathbb{N}$，其至圓上距離為整數的圓上點個數是否還會與前面結果一樣。首先我們舉了下列例子說明上述討論中條件圓半徑為整數或是$\overline{OP} \in \mathbb{N}$或是$d(O,L) \in \mathbb{N}$是必要的，否則結果將不會是$2([r]-[-r])$。

反例：我們取圓方程式C為$x^2+y^2=(1.2)^2$且點$P(1.8,0)$，則對圓上任意點$Q(x,y)$我們有$0.6=1.8-1.2 \le \overline{PQ} \le 1.8+1.2=3$，所以藉於此範圍內的距離為整數的有$1,2,3$，其中$\overline{PQ}=3$在圓上$Q(x,y)$只有 1 點，其他$\overline{PQ}=1,2$均與圓相交 2 點，故圓外一點$P(1.8,0)$至圓$C$距離為整數的圓上點個數為$1+2+2=5$，但$2([1.2]-[-1.2])=6$並沒有相等。

上述計算結果，我們得知半徑非整數時，就其結果不可以只看圓的半徑，其主要是因為高斯符號中並無此性質$[x+y] \neq [x]+[y]$，因為假如半徑非整數或是$\overline{OP} \notin \mathbb{N}$或是$d(O,L) \notin \mathbb{N}$，就會涉及高斯符號計算中小數進、退位的問題。

事實上我們在論證中，主要就是要推論高斯符號$[x+y]-[x-y]$化簡為何？其中這裡$x>y>0$，感覺上式中高斯符號裡的x被約掉，最後應該只跟y有關係的關係式。

參●結論

由以上討論證明了下列四種情況:

（一）當半徑 r 為整數時，圓外一點至圓距離為整數的圓上點個數為 $4r$。

（二）當半徑 r 為整數時，圓外一直線 L 至圓距離為整數的圓上點個數為 $4r$。

（三）當半徑 r 為任意正數且 $\overline{OP} \in \mathbb{N}$ 時，圓外一點 P 至圓距離為整數的圓上點個數為 $2([r]-[-r])$。

（四）當半徑 r 為任意正數且 $d(O,L) \in \mathbb{N}$ 時，圓外一直線 L 至圓距離為整數的圓上點個數為 $2([r]-[-r])$。

但是當圓半徑非整數且 $\overline{OP} \notin \mathbb{N}$ 或是圓半徑非整數時且 $d(O,L) \notin \mathbb{N}$ 時，以上結果可能不單只與圓半徑有關係，其最後結果將如何修正是我們未來想要完成的目標。

肆●引注資料

[1]普通高級中學教科用書：數學 3。翰林出版。
[2]初等解析幾何研究:左鈺如、季素月、朱家生、陳鼎。臺北市：九章出版社。
[3]高中數學競賽教程:嚴鎮軍。九章出版社。