方程式的公式解（根式解）

高雄中學數學科　蔡哲淵

n　根號的意義

定理：設a為一正數，n為自然數，則方程式$x^n=a$恰有一個正實根。此正實根稱為a之正n次方根，以符號”$\sqrt[n]{a}$”表示之。特別地，當$n=2$時，以$\sqrt{a}$表示a之正2次方根。

n　方程式的根式解

方程式的解用係數的加、減、乘、除或開根號來表示，稱為方程式的根式解。

n　一次方程式 $ax+b=0$，$a\neq 0$

解為$x=-\dfrac{b}{a}$。

n　二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，$a\neq 0$

- 遠在公元前1700年，巴比倫時期的泥板就有類似二次方程式公式解的記載，只是沒有用現代的形式。

- 希臘人重視幾何，認為負數是”不真實”的，即負數沒有幾何意義，導致其解二次方程式時，分

$$\begin{aligned}&ax^2=bx+c\\&ax^2+bx=c\qquad(a,b,c>0)\\&ax^2+c=bx\end{aligned}$$

  三種情形來討論。這想法亦嚴重的影響希臘在代數學上的發展。

- 印度人遠在西元628年就已認同負數的存在，代數學在印度有系統的發展起來，後經阿拉伯人的整理與潤飾，傳到西方世界。「代數學」的英文—algebra—便是來自

阿拉伯文的 al-jabr (al 為冠詞，jabr 為恢復、還原的意思)。現在書中所看到的二次方程式公式解的形式，就是在回教帝國時代首度出現的。

- 解二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，$a\neq 0$

$$ax^2+bx+c=0$$
$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}+(\frac{b}{2a})^2$$
$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

其中 $D=b^2-4ac$ 稱為二次方程式的判別式。當

$D>0$ 時，方程式有相異二實根；

$D=0$ 時，方程式有相同二實根；

$D<0$ 時，方程式無實根（有共軛虛根）。

- 練習：

(1) $2x^2-5x-3=0$

(2) $x^2-4x-4=0$

(3) $x^2-2x+5=0$

(4) $6x^2-13x+6=0$

- **三次方程式** $ax^3+bx^2+cx+d=0$，$a\neq 0$

  四次方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$，$a\neq 0$

  - 義大利人帕西歐里(Pacioli，1445—1509)於1494年出版《算數摘要》一書，特別強調解一次及二次方程式。但其對三次方程式無法可解，並相信不可能去解。尋求三次方程式之解的故事便開始展開。這問題的突破由波隆那大學的德費洛(del Ferro,1465—1526)開始，德費洛解了所謂「不完全的三次方程式」，也就是 $ax^3+cx+d=0$ 的形式，並把解法當成秘密，於臨終前傳給他的學生費歐爾(Fior，1506—?)。費歐爾以這解法當武器，向當時著名學者方特那(Fontana，1499—1557，綽號大舌頭)挑戰，提出了30個「不完全的三次方程式」的問題。結果費歐爾挑戰失敗，方特那成功地解出了「不完全的三次方程式」。接著故事主角卡當(Cardano，1501—1576)力促方特那透露他的方法，並答應守密(西元1539)。西元1543年，卡當與其學生費拉利(Ferrari，1522—1565)察看了德費洛的論文，發現德費洛早已解出了「不完全的三次方程式」，所以在1545年，不顧當初的誓言，在他的數學大作《大法》(Ars Magna，原文意為「偉大的技藝」)中，將「不完全的三次方程式」的解法整理發表。這便是一般所稱的「卡當公式」。在此同時，費拉利成功發現了求解四次方程式的技巧，但它視能否將四次簡化至相關的三次方程式而定。

  - 解「不完全的三次方程式」 $x^3+px+q=0$

    令 $x=u+v$

    $\Rightarrow\ x^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$

    $\Rightarrow\ x^3=u^3+v^3+3uv(x)$

    $\Rightarrow\ x^3-3uvx-(u^3+v^3)=0$

    比較原方程式，可得

    $$\begin{cases}-3uv=p\\ -(u^3+v^3)=q\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}u^3v^3=\dfrac{-p^3}{27}\\ u^3+v^3=-q\end{cases}$$

$\therefore\ u^3, v^3$ 是二次方程式 $t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0$ 的二根

$$\Rightarrow\ u^3=\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}=\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\ ,$$

$$v^3=\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}=\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

$$\Rightarrow\ u=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\text{ 或 }\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot w\text{ 或 }\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot w^2$$

$$v=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\text{ 或 }\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot w\text{ 或 }\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot w^2$$

又因為 $-3uv=p$，所以方程式 $x^3+px+q=0$ 的根 $x=u+v$ 為

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\text{ 或}$$

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot w+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot w^2\text{ 或}$$

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot w^2+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot w\ 。$$

$\boxed{w=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\text{ 是 }x^2+x+1=0\text{ 的根}}$

- 解三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$，$a\neq 0$

令 $x=y-\frac{b}{3a}$

$$\Rightarrow\ a(y-\frac{b}{3a})^3+b(y-\frac{b}{3a})^2+c(y-\frac{b}{3a})+d=0$$

$\Rightarrow\ ay^3+(c-\frac{b^2}{3a})y+(d+\frac{2b^2}{27a^2}-\frac{bc}{3a})=0$ 為一「不完全的三次方程式」，

利用上面的方法，可解得三根 y_1, y_2, y_3。

所以，三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的三根為 $y_1-\frac{b}{3a}, y_2-\frac{b}{3a}, y_3-\frac{b}{3a}$。

- 解「不完全的四次方程式」 $x^4+px^2+qx+r=0$

$x^4+px^2+qx+r=0$

$\Rightarrow\ x^4=-px^2-qx-r$　　兩邊同加 $x^2y+\dfrac{y^2}{4}$

$\Rightarrow\ x^4+x^2y+\dfrac{y^2}{4}=-px^2-qx-r+x^2y+\dfrac{y^2}{4}$

$\Rightarrow\ (x^2+\dfrac{y}{2})^2=(y-p)x^2-qx+\dfrac{y^2}{4}-r$ 為一完全平方式

$\therefore$ 判別式 $D=0$，即 $(-q)^2-4(y-p)(\dfrac{y^2}{4}-r)=0$，整理得

$y^3-py^2-4ry+(4pr-q^2)=0$ 為一三次方程式，

利用上面方法可解得三根 y_1,y_2,y_3。

因此 $(x^2+\dfrac{y}{2})^2=(y-p)x^2-qx+\dfrac{y^2}{4}-r$

$\Rightarrow\ (x^2+\dfrac{y}{2})^2=(y-p)(x-\dfrac{q}{2(y-p)})^2$

$\Rightarrow\ (x^2+\dfrac{y}{2})=\pm\sqrt{(y-p)}\left(x-\dfrac{q}{2(y-p)}\right)$ 分別將 $y=y_1,y_2,y_3$ 代入，

可得 x 的二次方程式，利用二次方程式之公式解，解得之 x，即為 $x^4+px^2+qx+r=0$ 的解。

- 解四次方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$，$a\neq 0$

令 $x=y-\dfrac{b}{4a}$

$\Rightarrow\ a(y-\dfrac{b}{4a})^4+b(y-\dfrac{b}{4a})^3+c(y-\dfrac{b}{4a})^2+d(y-\dfrac{b}{4a})+e=0$

$\Rightarrow\ ay^4+(c-\dfrac{3b^2}{8a})y^2+(d-\dfrac{bc}{2a}+\dfrac{b^3}{8a^2})y+(e-\dfrac{bd}{4a}+\dfrac{b^2c}{16a^2}-\dfrac{3b^4}{256a^3})=0$

為一「不完全的四次方程式」，利用上面的方法，可解得三根 y_1,y_2,y_3,y_4。

所以，四次方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 的四根為

$$y_1-\frac{b}{4a},y_2-\frac{b}{4a},y_3-\frac{b}{4a},y_4-\frac{b}{4a}\ 。$$

- 練習：

(1) $x^3-9x-28=0$

(2) $x^3+6x-20=0$

(3) $2x^3-30x^2+162x-350=0$

(4) $x^4-6x^2+2\sqrt{15}x-\dfrac{11}{4}=0$

五次或五次以上的方程式

- 三次及四次方程式問題解決後，大家注意的焦點自然便落在五次方程式了。但兩個世紀過去了，問題還是未解決，人們不禁懷疑：「五次方程式的根式解根本就不存在。」這懷疑直到 1826 年，才由挪威數學家阿貝爾(Abel，1802—1829)完全地證明出來。但並不是所有的五次或五次以上方程式均無根式解，因此問題又轉移到了怎樣的方程式才有根式解。這問題沒有困擾人們多久。在 1831 年，法國數學家伽羅瓦(Galois，1811—1832)就提出了方程式有根式解的充分必要條件(*)。至此，方程式的根式解問題也就此劃下句點了！

註：

定理：令方程式 $f(x)=0$ 的係數都在體 K 之內，G 是方程式 $f(x)=0$ 的 Galois 群。

則

$f(x)=0$ 有根式解的充分必要條件是，可以找到置換群 $G=G_0,G_1,G_2,\ldots,G_n$，其中 G_i 是 G_{i-1} 的正則子群，$[G_{i-1}:G_i]$ 是質數，且 G_n 只含有一個排列。